數學傳播 50卷2期, pp. 106-117

手術理論的三個尺度

胡海量

摘要: 手術是研究高維流形的一個基本工具。其想法是通過施加割補操作來修改空間的同胚型。以 Milnor-Kervaire 在怪球分類中的應用爲標誌性起點, 手術在幾何拓樸的研究中展示了強勁威力。隨著應用的深入和經驗的積累, 該理論本身也在不斷革新和發展, 而視角的演進是其中一個重要方面。本文從整體, 局部和微局部三個尺度解讀手術理論。第一層尺度是經典的, 即將流形視爲一個整體, 運用手術加以修改, 以期獲得同倫等價; 第二層尺度考察一個同倫等價可否沿子流形分裂, 關注整體和局部的聯繫; 繼續深入, 第三層尺度設問整體的手術不變量是否可由微局部「積分」得到? 在“三個尺度”這條線索之下, 我們回顧手術理論遞進發展的美妙篇章。

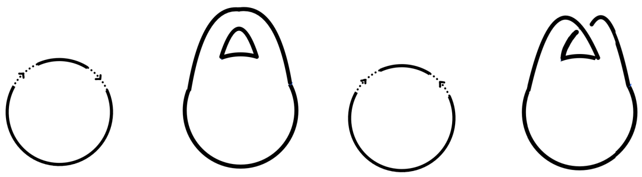
集合 $\{a,b,c\}$ 和 $\{1,2,3\}$ 之間存在元素的一一對應, 因而本質上可以視爲是等價的; 如何在拓樸空間上引入合適的等價關係? 除去集合層面元素 (點) 的一一對應, 我們還要求對應保持拓樸結構 (開集), 也即映射和其逆都是連續的, 這稱爲空間的同胚。流形是局部上和歐氏空間同胚的一類幾何體。基本的例子包括球面, 環面, 多孔環面等等。

流形的同胚分類是幾何拓樸學的中心命題。其中曲面的分類是 19 世紀拓樸學的偉大成就; 而 3 維流形的徹底分類, 隨著龐加萊猜測和幾何化猜測的證明, 獲得巨大進展; 但是在更高維度, 同胚分類是不可能完成的任務。原因在於, 任何有限表現的群都可以實現爲 4 維流形的基本群, 而代數上不存在算法區分兩個有限表現的群。全局的分類結果無法得到, 幾何學家轉而在更小的範疇處理該問題: 設定一個具體的倫型, 然後在給定倫型內討論同胚分類。這是手術理論關注的問題。

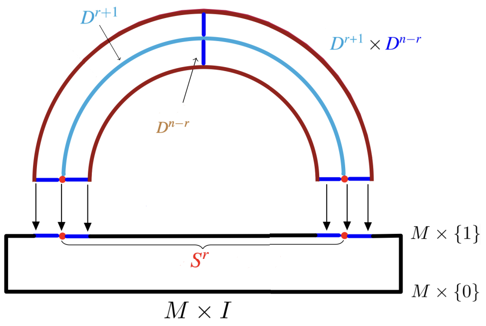
何爲倫型? 簡而言之, 它是拓樸空間在同倫等價關係下的等價類。兩個映射 f_0 和 $f_1: X \to Y$ 稱爲是同倫的, 如果它們可以由一個連續映射 $F: X\times[0,1] \to Y$ 連接起來, 即 $F(\ ,i) = f_i$; 空間 X 和 Y 稱爲是同倫等價的, 如果存在連續映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$, 使得複合映射 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 都同倫於恆同映射。同倫等價是一種比同胚更弱的等價關係, 比如圓盤和一個點同倫等價, 但兩者顯然不同胚。對於閉曲面而言, 作爲同倫不變量的歐拉數和可定向性已經完全決定同胚型, 因而同倫和同胚分類是一致的; 換言之, 我們無法在固定倫型內擾動同胚型, 這種現象我們稱之爲“拓樸剛性”。相關的例子還包括高維球面 (著名的龐加萊定理), 高維環面等等。捨此而外, 對閉流形而言, 同倫和同胚確有強弱之分 (非剛性的例子包括透鏡空間, 複射影空間等等), 這標誌了現代幾何拓樸學的誕生。

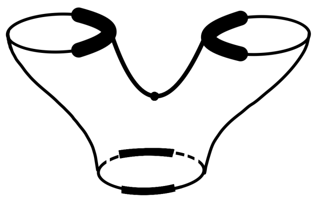
經典的手術理論將流形視為一個整體

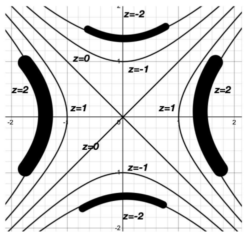
手術 (surgery) 又名換球術 (spherical modification), 其操作程序如下: 取定 M^m 中的一個嵌入球面 S^n 及其法向量叢的一個平凡化 (形式上這等價於選擇嵌入映射 $\Phi : S^n \times D^c \hookrightarrow M$)。現在割去 $\Phi(S^n \times D^c)$, 填回 $D^{n+1} \times S^{c-1}$, 得到新流形 $M' = \big(M - \Phi(S^n \times D^c)\big) \cup D^{n+1} \times S^{c-1}$ 其中黏接映射爲 $\Phi(x, y) \sim (x, y) \in S^n \times S^{c-1}$。選取球面 S^n 在 M 中不同的安置方式或者法叢的平凡化, 手術的結果可以相去甚遠。舉一個簡單的例子, 在圓周上做手術, 我們嵌入 S^0, 它的法叢可以有兩個不同的平凡化 (見下圖), 對應的手術結果是兩個圓周或者一個圓周。



手術可以用於修改幾何體。一個自然的問題是, 同維度的閉流形是否都可通過手術連接起來? 我們稱兩個閉流形 M 和 M' 是配邊的 (cobordant), 如果存在帶邊流形 W 使得 $\partial W = M \cup M'$。手術的起始和結果流形由 $W = M \times I \bigcup_{\Phi} D^{n+1} \times D^c$ 連接起來, 因而是配邊的; 反之, 如果 W 是 M 和 M' 的一個配邊, 我們可以在其上配置一個 Morse 函數, 臨界點 (critical point) 的信息反應出流形結構的變化: Morse 函數的每個臨界點, 都對應一次手術。下圖左邊是一個圓周和兩個圓周的配邊, 右邊是其臨界點附近曲面 $z = x^2 - y^2$ 的等高線圖。兩幅圖片結合起來較清晰地展示了臨界點如何與手術掛鉤。一般地, 兩個配邊的流形可以通過有限次手術連接起來。所有同維度的閉流形在配邊關係下劃分成等價類, 而配邊群的計算是已知的結果, 在某些維度它是平凡的 (比如在 3 維或是 6 維), 這意味著該維度的任意



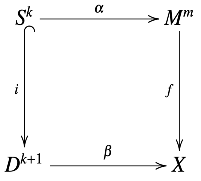




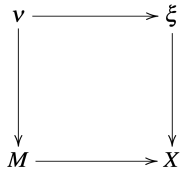
兩個閉流形彼此可以由一串手術聯繫起來。在另外一些維度, 配邊群不平凡, 所有的配邊不變量都是手術可連接的潛在阻礙 (比如模 2 歐拉數, 球面和實射影空間不可能通過手術連接)。

手術之於流形研究大有作用的一個原因是它可以簡化空間的同倫群。在 CW 複形範疇, 我們用高維胞腔填實球面來消去同倫群元素; 手術是上述操作在流形範疇的升級版本: 嵌入球面在手術中被填實, 其所代表的同倫群元素被消去。Novikov 最先提出用手術消去映射的相對同倫群。依據 Whitehead 的定理, 如果映射的相對同倫群全部消失, 則我們獲得同倫等價。

映射從何而來? 設定目標爲找到所有和給定空間 X 同倫等價的流形。將 X 放到高維球面中, 則存在壓縮映射 $S^k \to \mathrm{Th}(\nu)$ (這裡 $\mathrm{Th}(\nu)$ 代表嵌入 $X \hookrightarrow S^k$ 的法叢 ν 的 Thom 空間, 它由單位法叢模去單位法球叢得到。壓縮映射限制到單位法叢上是恒同, 將單位法叢之外的空間映爲一點) 調整上述壓縮映射使其與 X 橫截, 則前像便是我們可以嘗試用於進行手術的流形。現在需要決定該映射可否由手術調整爲同倫等價。



映射 $f : M^m \to X$ 的相對同倫群 $\pi_{k+1}(f)$ 元素由左圖表出。如果 $\alpha : S^k \hookrightarrow M^m$ 是嵌入映射且法叢平凡, 則可以利用手術將其消去。由惠特尼的定理, 在一半維數以下, 嵌入總是存在; 爲了促成手術定義中“法叢平凡”這一條件成立, 現在附加一個設定: M 放置到高維球面中的穩定法叢 νM 是由 X 上的向量叢拉回 (如右下圖)。

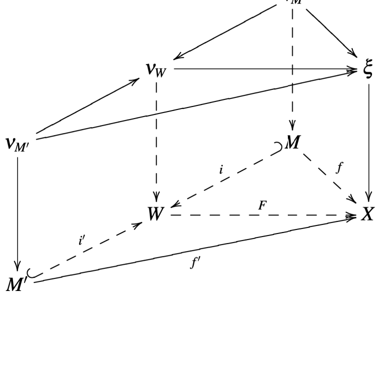


這一設定的提出基於以下觀察:

- 同倫群代表元的圖表交換性以及圓盤 D^{k+1} 的可縮性蘊含: X 上向量叢經 f 和 α 拉回到 S^k 必然是平凡的。因此附加設定意味著 M 的穩定法叢 νM 限制到嵌入球面 S^k 上是平凡的。
- 由向量叢運算的基本事實 $TM\big|_{S^k} \oplus \nu M\big|_{S^k} \simeq T\mathbb{R}^l\big|_{S^k} = \varepsilon^l$ 以及 $\nu M\big|_{S^k}$ 的平凡性, 得到 $TM\big|_{S^k}$ 是穩定平凡的; 結合 S^k 切叢的穩定平凡性, 可以得出 ν $(S^k \hookrightarrow M)$ 穩定平凡的。當 $k < \frac{1}{2}\mathrm{dim}\ M$ 時, 穩定平凡的法叢是平凡的, 從而可以進行手術。

這樣我們自然提煉出了手術問題的雛形。以下兩個問題是必須回答的:

我們會損失信息嗎? 是否所有同倫等價的流形 M' 都來源於如上的手術問題? 答案是肯定的。給定同倫等價 $f : M' \to X$, 用同倫逆 f^{-1} 將M'的穩定法叢拉回即可造出一個手術問題。



手術操作是“可持續”的嗎? 連接手術起始和結果流形的配邊流形 $W = M \times I \cup_\alpha D^{n+1} \times D^c$ 同倫等價於 $M \cup_\alpha D^{n+1}$ (這只需將 $M \times I$ 壓扁, 將 D^c 縮成一點即可)。映射 $f : M \to X$ 擴張到 W 上當且僅當 $f \circ \alpha$ 同倫於常值映射, 而這顯然滿足 (因爲手術將這個同倫群元素殺死了)。將擴張後的映射限制到 W 的上邊緣便得到一個從手術結果流形到給定空間的映射 $f' : M' \to X$。現在我們希望繼續用

手術將 f' 修改爲同倫等價。它是否符合附加設定? 問題可以轉化爲附加設定中的叢映射可否擴張到整個 W。代數拓樸的知識斷言: 這在一半維數以下是可行的。我們稱兩個手術問題法向配邊 (normal cobordant), 如果附加設定中的向量叢映射可以擴充到整個配邊流形 W 上 (見如上示意圖)。所有的法相配邊等價類便是我們可以用於手術的資料, 以後我們用記號 $N(X)$ 代表 X 上的手術問題的集合。

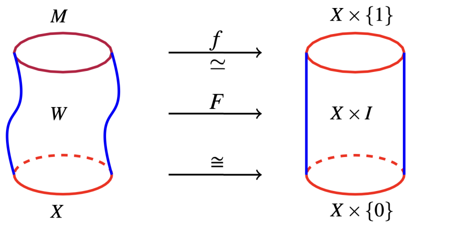
按照以上分析, 在一半維度以下, 我們可以通過多次手術依次消去低維度的相對同倫群(使得同倫等價的阻礙不斷向高維集聚, 直至到達中間維度)。在中間維度, 作爲同倫群代表元的嵌入球面未必具有平凡法叢, 我們遇到一個手術障礙 (依據對偶理論, 如果中間維度的障礙也消失, 則全部的相對同倫群均消失, 我們獲得同倫等價)。

作爲幾何現象的一個代數刻劃, Wall [10] 在深入分析了浸入球面的相交數和自相交數後, 定義出 L 群, 手術障礙座落在該群中。手術理論基本定理可以表述爲: 一個手術問題法向配邊到同倫等價的必要條件是手術障礙在 L 群中與零元等價; 當維數大於 4, 該條件也是充分的。

以上分析凝練爲整體視角之下手術理論的高峰–手術正合列:

$$\cdots \to L_{n+1}(\pi_1 X) \xrightarrow{\partial} S(X) \xrightarrow{i} N(X) \xrightarrow{\phi} L_n(\pi_1 X)$$

這裡 $N(X)$ 代表X上手術問題的法向配邊類, $L(\pi_1 X)$ 是手術阻礙集 (它依賴於X的基本群), 映射 ϕ 賦予每一個手術問題以對應的手術障礙。
如果障礙爲零, 則可以執行手術獲得同倫等價。同倫等價 $f : M \to X$ 稱爲 X 上的一個結構, $S(X)$ 是結構集, 兩個結構視爲等價, 如果他們可以由一個指向 $X \times I$ 的同倫等價連接起來。當結構集只包含一個元素, 意味著任何到達 X 的同倫等價都可以同倫到一個同胚映射, 從而 X 是拓樸剛性的。手術正



$a = \phi(F) \in L_{n+1}(\mathbb{Z}\pi_1)$　　$\partial(a) := [f : M \to X] \in S(X)$

合列可以向左無限延伸: L_{n+1} $(\pi_1 X)$ 中的元素實現爲 $X \times I$ 上手術問題的障礙 (下邊緣是同胚映射, 上邊緣爲同倫等價, 如右圖), 連接映射 ∂ 將這個障礙送到上邊緣的結構。

作爲手術理論的高度濃縮, 手術正合列將幾何上具體的割補操作轉化爲代數上形式的圖表分析。幾何拓樸中的許多問題, 可以借此給出獨特的解釋。我們以一個手術正合列在變換群理論中的應用來結束這一節的討論。

給定群 G 在流形 M 上的一個自由作用 (比如通用覆疊空間上的覆疊變換), 寫下 M 和

軌道空間 M/G 所對應的手術正合列

$$\begin{array}{ccc} L_{n+1}\big(\pi_1(M^n)\big) & \longrightarrow & S(M^n) \\ \mathrm{trf}\uparrow & & \mathrm{trf}\uparrow \\ L_{n+1}\big(\pi_1(M^n/G)\big) & \longrightarrow & S(M^n/G) \end{array}$$

這裡垂直方向的映射稱爲遷移 (transfer), 即將軌道空間上的結構和手術障礙遷移到原來的空間上。如果軌道空間的結構來自於高一維手術障礙群的作用, 且手術障礙群上的的遷移映射有非平凡的核 (kernel)[1], 則圖表的交換性馬上蘊含有趣的結果: 對於軌道空間上的結構, 他們對應的遷移落在 M 結構集的基點之上, 換言之, 我們得到 M 上的自由群作用。

註記: 需要指出, 手術正合列的計算並不直接給出流形的分類結果, 這是因爲結構集中的非平凡元素不一定由同胚型表出。M 上的自同倫等價通過和結構集中的元素複合, 亦可給出 M 上新的結構。結構集在模去這個作用之後, 才得到倫形 M 內的同胚型集合。自同倫等價及其在結構集上的作用並不容易計算。在一些特殊的情形, 比如複射影平面, 自同倫等價是平凡的, 因而結構集由同胚型表出; 另外一些時候, 結構集本身平凡 (剛性), 上述困難自動消失。

分裂理論聯繫起局部與整體

對一事物的良好理解意味著我們不但能在整體上把握它, 而且可以在各個尺度上對其進行拆分和重組。手術理論的第二層觀點即由此展開, 這裡一個中心的問題是:

母流形上的同倫等價是否可沿給定子流形分裂?

我們稱同倫等價 $f: W' \to W$ 沿子流形 M 分裂, 如果它可以同倫到一個新的映射 (依然記爲 f) 使得

- f 與子流形 M 橫截 (前像法叢 $\nu: f^{-1}M \hookrightarrow W'$ 是法叢 $\nu: M \hookrightarrow W$ 的拉回)。
- f 限制到子流形 $f^{-1}M$ 及其補空間 $W' - f^{-1}M$ 上均是同倫等價。

除去哲學層面的內省, 上述設問的誕生也獲益於具體問題的研究牽引, 試舉幾例:

- S^1 上的纖維化問題：探索何時映射 $f: M \to S^1$ 同倫到纖維叢的投射。
- Novikov 猜想：斷言流形的 Higher signature 是定向倫型的不變量。
- 流形的嵌入問題：探索何時子流形能以給定法叢嵌入母流形。

以上問題雖然在表述上並不涉及分裂, 但均可從同倫分裂的角度切入研究或給予良好解讀。Browder, Farrell-Hsiang, Cappell 和 Freedman 在不同餘維數的情形對分裂問題開展了先驅性的工作。

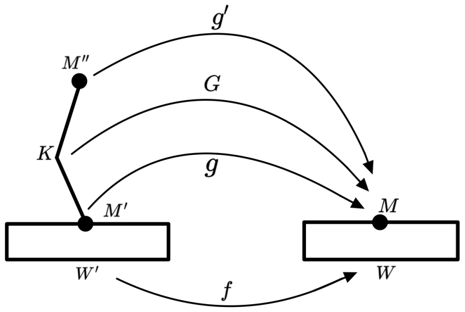
---

[1]比如當 $\pi_1(M/G)$ 爲有限群且維數在 $4k+3$ 時, 這兩條常常滿足。

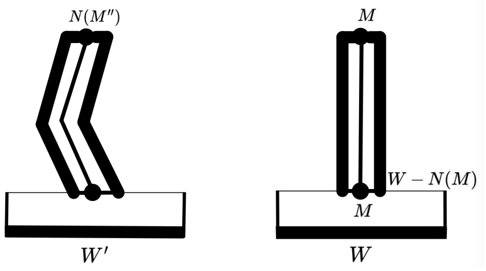
最初的想法是在流形內部對子流形做手術來製造映射的分裂, 雖然直接, 但是限制較多。更好的觀點是首先忽略外周流形, 只專注於在子流形上進行手術, 之後嘗試說明可以調整外周空間使得它和原來的母流形一致。我們以一個例子來展示精神。

Browder **分裂定理**

Browder 開啟了同倫等價沿子流形分裂問題的研究。其分裂定理指出, 在餘維數大於 2 的情形, 同倫分裂的阻礙僅來自於子流形的抽象手術阻礙。這是手術理論的一個經典例子。由於並不涉及複雜的代數, 我們可以愉快地接受並欣賞之。



如左圖, 給定流形偶 (W, M), 以及同倫等價 $f: W' \to W$, 我們首先嘗試將 $g = f\big|_{f^{-1}(M)}: M' \to M$ 調整成爲同倫等價。如果 g 的手術障礙爲 0, 這可以通過對 M' 做手術實現: 即存在連接 M' 和 M'' 的配邊 K 以及自 K 到 M 的映射 G, 使得 $G\big|_{M''} = g'$ 是同倫等價。第二階段的調整, 我們用 G 將 M 在 W 中的法叢拉回, 得到一個新的手術問題:



保持粗線條部分不動, 嘗試修改極細線條及其餘部分以得到同倫等價 (如右圖)。注意到, 當 M 的餘維數大於 2 時, 以下基本群的含入映射是一個同構

$$i_*\pi_1\big(W - N(M)\big) \overset{\cong}{\Rightarrow} \pi_1 W$$

$\pi - \pi$ 定理保證上述手術障礙爲零, 故可以繼續用手術調整其餘部分, 得到子流形補空間上的同倫等價。最後需要回答: 手術之後, 左邊示意圖的上邊沿是否的確爲 W'? 如果在手術中我們要求單純同倫等價, 則由於目標流形是一個柱體 $W \times I$, 左邊也同胚於一個柱體 $W' \times I$, 從而上邊緣同胚於 W', 這樣就的確造出 f 的一個分裂。

$\pi - \pi$ 定理及其應用概述

給定帶邊流形 $(M, \partial M)$, 其上的手術問題有兩種類型, 一種是固定邊界(即邊界是給定的同倫等價), 只允許修改流形的內部, 對應的手術正合列

$$S(M \text{ rel } \partial M) \to N(M \text{ rel } \partial M) \to L(M \text{ rel } \partial M),$$

此情形下的手術阻礙群同構於 $L(\pi_1 M)$。

另外一類是允許修改邊界和內部 (即首先調整邊界成爲同倫等價, 之後固定邊界, 調整內部), 對應的手術正合列

$$S(M, \partial M) \to N(M, \partial M) \to L(M, \partial M).$$

此情形下的手術阻礙群符合長正合序列

$$L(\pi_1\partial M) \to L(\pi_1 M) \to L(M,\partial M).$$

給定帶邊流形 $(M,\partial M)$, 如果含入映射 $i_*: \pi_1\partial M \overset{\simeq}{=} \pi_1 M$ 是同構 ($\pi-\pi$ 條件), 則手術阻礙群 $L(M,\partial M)$ 爲平凡群。

上述 $\pi-\pi$ 定理給手術理論提供了一個便於使用的技術工具。我們給一個計算扭結補空間的結構集的例子。扭結是 n 維球面在 $(n+2)$ 維球面的一個安置。挖去扭結的一個管狀鄰域, 得到一個帶邊流形 $(C,\partial C)$; 這裡 ∂C 同胚於 $S^n\times S^1$, 而 C 是同調圓周。如果 $(C,\partial C)$ 符合 $\pi-\pi$ 條件, 則上述第二類手術正合列爲

$$S(C,\partial C) \simeq N(C).$$

運用 C 是同調圓周以及手術分類空間的基本知識 (此處略去) 可以得到 $N(C)=0$, 這意味著此類扭結補是拓樸剛性的。

分裂理論自然衍生出分層手術

經典的分裂問題中, 我們要求外周流形保持不變, 嘗試調整給定映射使之沿子流形分裂。換一個視角, 我們亦可允許外周流形在固定倫型內變動: 給定空間偶 (W,M), 找出所有的同倫等價 $f: W'\to W$ 使其沿子流形 M 分裂。這樣的映射組成分層手術 (stratified surgery) 的結構集 $S^{\rm BQ}(M\subset W)$。

Browder-Quinn 最先給出一般分層空間的手術正合列 [2]。分層空間的兩個基本例子是帶邊流形 $(M,\partial M)$ 和流形偶 (W,M)。前者對應的手術正合列我們剛才已經討論 (見上文 $\pi-\pi$ 定理); 在流形偶的情形, 手術正合列形如

$$\cdots\to L^{\rm BQ}_{+1}(M\subset W)\to S^{\rm BQ}(M\subset W)\to N^{\rm BQ}(M\subset W)\to L^{\rm BQ}(M\subset W).$$

以上正合列中各項均由經典手術正合列的相應項累加組合得到。以 $S^{\rm BQ}(W,M)$ 爲例, 我們有三個部分的結構:

- 子流形的同倫等價 $f\big|_{M'}: M'\to M$。
- 法叢的拉回同構。
- 補空間的同倫等價 $f|_{C'}: C'\to C$ (∂C 上的同倫等價固定)。

上述結構組裝到一起, 得到 (W,M) 上的一個分層結構。計算上存在纖維化

$$S(C \text{ rel } \partial C)\to S^{\rm BQ}(M\subset W)\to S(M).$$

類似地, 可以定義出分層手術的障礙集和問題集[2]。分層結構集有非常自然的限制和遺忘映射分別到達子母流形, 從而聯繫起局部與整體。 作爲應用, 我們給出 Browder 分裂定理的一個代數解釋並討論流形偶的相對剛性概念。

Browder 分裂定理的代數解釋

考慮流形偶 (W, M) 的分層手術正合列到母流形 W 的手術正合列的遺忘映射[3]

$$\begin{array}{ccccc} \Omega\mathbf{L}(M) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \mathbf{L}(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}^{\mathrm{BQ}}(M\subset W) & \longrightarrow & \mathbf{NI}^{\mathrm{BQ}}(M\subset W) & \longrightarrow & \mathbf{L}^{\mathrm{BQ}}(M\subset W) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Forget}_S} & & \simeq\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Forget}_N} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Forget}_L} \\ \mathbf{S}(W) & \longrightarrow & \mathbf{NI}(W) & \longrightarrow & \mathbf{L}(W) \end{array}$$

在餘維數 ≤ 3 時, 分層手術障礙群的定義蘊含

$$\mathbf{L}^{\mathrm{BQ}}(M \subset W) \simeq \mathbf{L}(M) \times \mathbf{L}(W).$$

這導致了圖表最右側的正合列。法不變量上的遺忘映射是一個同倫等價。這兩點導致了最左側的纖維化, 其對應的同倫群的長正合列爲

$$\cdots \to S^{\mathrm{BQ}}(M \subset W) \xrightarrow{F} S(W) \xrightarrow{\theta} L_m(M).$$

映射 θ 取子流形上的手術阻礙 $f\big|_{f^{-1}(M)} : f^{-1}(M) \to M$。由 $S(W)$ 處的正合性, 若子流形的抽象手術阻礙爲零, 則原來的分裂問題可解, 這給出 Browder 分裂定理的一個代數解釋。

相對剛性

將流形視爲一個世界, 則其子流形是一些內部的小世界, 釐清兩者之間的關係是一個要緊的問題。具體地, 子流形可以在何種程度上被擾動? 爲了闡釋這一點, 我們引入一個生物學上的類比。將母流形視爲 DNA, 子流形視爲一些 DNA 的片段。現在, 嘗試複製 (clone) 某些基

---

[2]比如分層手術阻礙集滿足纖維化 $L(C \text{ rel } \partial C) \to L^{\mathrm{BQ}}(M \subset W) \to L(M)$。

[3]下述圖表中, 我們使用手術正合列的空間化 (spacification)。簡而言之, 存在空間的纖維化 $\mathbf{S}(M) \to \mathbf{NI}(M) \to \mathbf{L}(M)$ 其同倫群的長正合列爲經典的手術正合列。分層手術也有相應的结果。之後我們總是用粗體代表手術的空間化。

因片段並將其嫁接到 DNA 中。某些情況下, 嫁接是可行的, 我們可能會得到具有新結構和不同生物功能的 DNA; 另外一些時候, 嫁接被拒絕, 這表明原來的子母結構存在一定程度的“相對剛性”。回到流形範疇, 手術可以用來生成與給定空間“相似” (同倫等價) 的流形, 類比於生物學的問題, 我們探究有無可能用同倫等價的幾何體替換給定的子流形, 並探究其可能的後果。流形偶 (W, M) 的分層手術正合列到子流形 M 的經典手術正合列有一個自然的限制映射, 通過圖表追蹤, 我們可以獲得子流形不可移植的例子。比如給定標準嵌入 $(S^{10}, S^4\times S^4)$, 我們無法將同倫等價於 $S^4\times S^4$ 的流形以原來的方式放入 S^{10}。[4] 類似的例子也出現在光滑範疇 [5], 比如給定扭結 $S^n\subset S^m$, 現在賦予 S^n 以怪異的微分結構, 它常常無法延拓到整個 S^m。

聚合映射考察整體和微局部的互動

整體的性質常常由微局部的對應物 “積漸所至”, 我們引述一個有趣的定理來開啟本節的討論: 給定連續映射 $f: X\to Y$, 如果對任意點 x, 其前像 $f^{-1}(x)$ 是零調的, 則 f 誘導兩個空間之間的同調群的同構。這裡微局部的條件是對應點的同調群同構, 其導致的整體上的後果是整個空間同調群的同構。

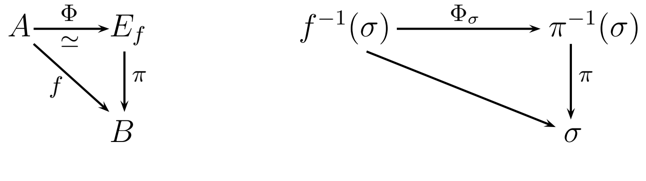
我們嘗試在手術理論中尋找類似的現象: 把第二層視角的精神引向微局部, 將分裂加細, 然後設問

1. 整體的手術障礙可否實現爲微局部手術障礙的「積分」? 手術問題和同倫結構可否由微局部的對應拼裝得到?
2. 如何定義合適的微局部手術問題?

Frank Quinn [7] 最先提出了聚合 (assembly) 的概念, 其切入點是一般底空間下映射的塊狀纖維化 (block fibration) 問題:

一個映射何時可以同倫到一個塊狀纖維叢 (Block bundle) 的投射?[5]

給定映射 $f: A\to B$, 存在纖維化 $\pi: E_f\to B$ 使得 $\Phi: A\to E_f$ 是一個同倫等價



[4] “以原來的方式”是指新造的空間偶分層同倫等價於原來的流形偶。

[5] 空間 B 上的一個 F 塊狀纖維叢 (Block Bundle) 是一種類似於纖維叢的結構。取定底空間的一個三角剖分, 在每個單形 σ 上, 都同胚 $\sigma\times F$ 其不同於一般纖維叢的地方在於並不存在交換圖。

取定 B 上的一個單純剖分, 我們調整 f 使其與單形 $\sigma \in B$ 橫截, 從而得到一個微局部的手術問題

$$\Phi_\sigma : f^{-1}(\sigma) \ \to \ \pi^{-1}(\sigma).$$

如果可以通過手術將 Φ_σ 調整爲一個單純同倫等價, 則手術後左邊的空間將同胚於 $\sigma \times F$, 這意味著我們得到了 σ 上的塊狀叢結構。

依據 Quinn-Nicas 的手術空間化理論 [7][6], 對每個 l-維單形 $\sigma^l \in B$, 手術問題 Φ_σ 是障礙空間 $\mathbf{L}_{j+l}\big(\pi^{-1}(\sigma^l)\big)$ 的一個頂點 (這裡 $j = \dim F$)。定義

$$\mathbf{L}_j(\pi) := \bigcup_{\sigma^l \in B} \mathbf{L}_{j+l}\big(\pi^{-1}(\sigma^l)\big).$$

對單形 $a \in \mathbf{L}_{j+l}\big(\pi^{-1}(\sigma^l)\big) \subset \mathbf{L}_j(\pi)$ (這裡 l 取成滿足條件的最小整數), 定義 a 在 B 中的投射爲 σ^l, 如此則 $\mathbf{L}_j(\pi)$ 成爲 B上的一個塊狀纖維叢, 它的纖維是 $\mathbf{L}_j(F)$。這些單形上的手術問題 $\Phi_\sigma : f^{-1}(\sigma) \to \pi^{-1}(\sigma)$ 沿著邊界相容地黏合後, 恰好對應到塊狀纖維叢 $\mathbf{L}_j(\pi) \to B$ 的一個截面。注意到, 將這些手術問題聚合到一起, 形成一個到 E 的手術問題, 而它已經是一個同倫等價。這意味著 $f : A \to B$ 同倫到塊狀纖維化 $\pi : E \to B$ 的代數阻礙座落在以下聚合映射的纖維裡面

$$\mathbf{Sect}(\mathbf{L}_j(\pi) \to B) \xrightarrow{A} \mathbf{L}_{b+j}(E).$$

類似於如上構造的障礙空間的塊狀纖維化 $\mathbf{L}(\pi)$, 我們也可以造出結構集空間的塊狀纖維化 $\mathbf{S}(\pi)$ 和手術集空間的塊狀纖維化 $\mathbf{NI}(\pi)$, 並且得到相應的聚合映射

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega \text{ fiber of } A & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \text{fiber of } A \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Sect}(\mathbf{S}(\pi) \to B) & \longrightarrow & \mathbf{Sect}(\mathbf{NI}(\pi) \to B) & \longrightarrow & \mathbf{Sect}(\mathbf{L}_j(\pi) \to B) \\
\downarrow A_S & & \simeq \downarrow A_N & & \downarrow A_L \\
\mathbf{S}(E) & \longrightarrow & \mathbf{NI}(E) & \longrightarrow & \mathbf{L}_{j+b}(E)
\end{array}$$

如果塊狀纖維叢是平凡的, 則截面集合等同於底空間到纖維的映射空間

$$\mathbf{Sect}(\mathbf{L}_j(\pi) \to B) \simeq [B, \mathbf{L}(F)].$$

現在考慮映射 Id: $B \to B$, 則對應的纖維 F 是一個點, 上述圖表最右邊的列變成

$$\mathbf{S}(B) \to [B, \mathbf{L}(e)] \xrightarrow{A} \mathbf{L}(B);$$

中間項可以寫成空間 M 關於手術譜 $\mathbf{L}(e)$ 的廣義同調群 $\mathbf{H}(M, \mathbf{L}(e))$. 同調群的可加性提示我們, 它可以視爲微局部手術障礙在全空間的"積分"。這給出經典手術正合列的一個新解釋: 手術問題的集合實際上是微局部手術障礙的聚合, 它與整體手術障礙群之間的差別由結構集度量。

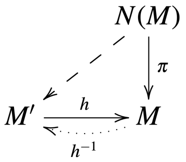
聚合觀點下的子流形嵌入定理

流形理論中著名的 Browder-Casson-Haefliger-Sullivan-Wall 定理指出:

在拓樸或者分片線性範疇, 如果 M 可以嵌入到W 且餘維數大於 2 , 則與 M 同倫等價的流形 M' 也可以嵌入到 W 中

將法叢 $N(M)$ 到 M 的投射和同倫逆 $h^{-1}: M \to M'$ 複合可以得到映射 $h^{-1}\circ\pi : N(M) \to M'$。如果可以說明上述映射是一個塊狀纖維化的投射, 則顯然 M' 嵌入到 $N(M)$, 從而完成證明。依據上文 Quinn 的定理, 這個阻礙落在聚合映射的纖維裡面。注意到 $h^{-1} \circ \pi$ 的纖維是

圓盤 D^c, 當嵌入的餘維數 $c > 2$ 時, (D^c, S^{c-1}) 滿足 $\pi - \pi$ 條件, 所以手術障礙群消失, 這樣聚合映射的纖維是消失的, 從而沒有阻礙。



結語

過去的一個世紀, 手術理論由初生到興起, 繁花盛開, 精彩迭出: 從 Milnor 第一次明確提出手術的概念, 到 Milnor-Kervaire 利用手術分類 7 維球面上的微分結構; 從 Browder-Novikov 對映射引入手術並用於研究單連通流形的分類, 到 Sullivan 決定手術的分類空間並寫下手術正合列的雛形; 從 Browder-Levine 運用手術研究映射的纖維化問題, 到 Farrell-Hsiang 將其與同倫的分裂掛鉤, 再到 Cappell 研究餘 1 維分裂並將其用於 Novikov 猜想的證明; 從 Quinn 發明聚合映射, 開啟手術理論的幾何描述到 Ranicki 運用聚合觀點研究同調流形。凡此種種, 不唯有技術層面的匠心獨具, 更兼具哲學觀點上的遞進發展。三個尺度的視角貫穿其間, 編織出一幅美妙的畫卷, 值得後來者玩味品鑒, 汲取智慧和力量!

参考文獻

1. W. Browder, *Surgery on simply-connected manifolds.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 65. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

2. W. Browder and F. Quinn, A surgery theory for G-manifolds and stratified sets, in Manifolds-Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), 27-36. Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975.
3. S. Cappell and A. Ranicki, Surveys on surgery theory, Vol. 2, *Ann. of Math. Stud.*, 149, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
4. J. Milnor, Collected papers of John Milnor. III. Differential topology. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
5. F. Michel and C. Weber, *Higher-dimensional knots according to Michel Kervaire*, EMS, 2017.
6. A. Nicas, Induction theorems for groups of homotopy manifold structures, *Mem. Am. Math. Soc.*, 267, AMS., 1982.
7. F. Quinn, A geometric formulation of surgery, Topology of Manifolds (Proc. Inst., Univ. of Georgia, Athens, Ga., 1969), 500-511, Markham Publishing Co., Chicago, IL, 1970.
8. A. Ranicki, *Exact sequences in the algebraic theory of surgery*, Mathematical Notes, 26. Princeton University Press, Princeton, N.J, 1981.
9. A. Ranicki, *Algebraic and geometric surgery*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002.
10. C. T. C. Wall, *Surgery on compact manifolds. Second edition*, Mathematical Surveys and Monographs, 69. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
11. C. T. C. Wall, *Differential topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 156. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
12. S. Weinberger, *Topological classification of Stratified spaces*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

—本文作者任教於中國大連海事大學—